

《概率统计》教案

贝叶斯公式及其应用

贝叶斯公式及其应用——教案

授课题目	贝叶斯公式及其应用	授课专业	工科类各专业
任课教师		课时	1 学时
教材分析	本节课是贝叶斯公式，选自第一章第五节。它是前面学习的条件概率，乘法公式和全概率公式的综合应用。贝斯公式在实际生活中具有非常广泛的应用，比如大数据，人工智能，海难搜救、邮件过滤等等，是概率论与数理统计课程教学中的一个难点。由于原理复杂，老师直接讲解定义概念，不易讲清，且学生理解困难，最后的结果将会导致学生机械地记忆步骤做题，忽略方法的思想与原理，以至于影响他们学习的积极性，有碍于科学素养的培养。因此，需要在授课过程中加入实际生活的应用案例，帮助学生理解。		
学情分析	学生在大学一年级时已经学习过微积分知识，具备了学习本课程的基础知识。 学生是理工类专业大学二年级的学生，他们成长于网络时代，喜欢新鲜事物，对新技术特别感兴趣，而对新技术背后的数学不怎么感兴趣，所以，课堂上我们要充分调动学生的积极性，激发学生的学习兴趣。 贝叶斯公式，超乎学生的直观感悟经验，抽象度高。对类比归纳、抽象概括、联系与转化、知识迁移等的思维能力有较高的要求，学生学习起来具有一定难度。		
教学目标	知识目标 通过本节课的学习，让学生理解贝叶斯公式，掌握应用贝叶斯公式的方法步骤。 能力目标 在讲授贝叶斯公式的过程中，用形象直观的实际例子作为引例，通过自主探究形成独立的分析问题、解决问题的能力；在参与解决问题的过程中获取知识、发展思维、感悟数学；提升学		

	生数学抽象、直观想象、逻辑推理的能力。 情感目标 通过创设问题情境、自主探究、发现共性，让学生亲身经历贝叶斯公式的产生发展、抽象概括过程，感受探索的乐趣与成功的喜悦，培养学生学习数学、探究数学的兴趣；通过应用实例，让学生充分体会数学与现实生活的紧密联系，感悟数学的应用价值。
重点难点	重点：理解贝叶斯公式，掌握贝叶斯公式的使用条件。 难点：会应用贝叶斯公式解决实际问题。
教学方法	采用问题驱动式、启发引导式、自主探究实践式、类比化归法。教学中遵循“学生为主体，教师为主导，知识为主线，发展思维为主旨”的原则。以生活中熟悉的问题为学生创设自主探究、合作交流的空间，引导学生类比探究，使得原本抽象难懂的统计方法变得浅显易懂，让学生在参与中获取知识，发展思维，感悟数学，从而实现让学生既掌握知识，又发展能力、陶冶品德。
教学手段	多媒体辅助教学。通过多媒体弥补传统教学的不足，增强教学效果的直观性、立体性，帮助学生更好地理解贝叶斯公式的思想，揭示贝叶斯公式的本质。由于贝叶斯公式的原理比较抽象，因此理解贝叶斯公式的原理，领会思想是教学的难点，在教学中通过实例引入、多媒体演示、背景知识介绍等方式来突破难点。
教学资源	慕课，微课，课件，雨课堂，超星学习通 APP

教学过程设计	
课前任务	设计意图
学习通中发布任务： 1. 请学生复习乘法公式和全概率公式； 2. 请学生观看贝叶斯公式微课视频； 3. 请学生思考下面问题： 在某个聊天软件中，男生占 $\frac{2}{3}$，女生占 $\frac{1}{3}$，男生真实填写性别比例占 $\frac{1}{2}$，女生真实填写性别比例占 $\frac{3}{4}$，现随机选取一名标注为女生的成员聊天，求对方真的是女生的概率是多少？	明确教学目标，抛出问题，激发学生的学习兴趣。
课堂教学	设计意图
一、举例引入： 先播放一个关于银行信用评价体系的视频，提出问题。 从视频可以看到，客户对银行的信用评价体系有疑问，但银行工作人员并不能清楚的说明，银行信用评价体系的来源及其科学性，因此，如何用科学的方式向客户讲述清楚银行个人信用评价背后的道理，便是一个非常有意义的问题。 再给另一个问题，新冠肺炎核酸检测中的“假阴性”问题。 对于新冠肺炎及时准确的检测和排查对于疫情的防控尤为关键，那么如何快速准确的找出疑似患者呢？最主要的方法就是对新冠病毒的 RNA 进行核酸检测，一般来说核酸检测呈阳性，可以作为新冠肺炎确诊的金标准，但在核酸检测过程中，多地多家医院频繁出现假阴性病例，所谓假阴性指的是病人实际上被新冠	创设情境，引入新课。

病毒感染了，但是检测不到病毒，核酸检测结果为阴性。要及时准确的找出疑似患者，急需降低假阴性的概率，那么从数学的角度如何降低核酸检测中假阴性的概率，快速准确的找出疑似患者，便是一个有意义的现实问题。

要科学的回答上述两个问题，要用到概率论中一个非常重要的公式，就是今天要学习的贝叶斯公式。

复习提问：

复习上节课学习全概率公式，它体现了分类讨论，化繁为简的思想，是用来解决“由因求果”的问题。

全概率公式： $P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)$ ，由因求果

二、讲授新课：

定理：设 S 为样本空间， A 是一个事件， $B_1, B_2, \dots, B_n$ 是 S 的一个划分，且 $P(A) > 0$ ， $P(B_k|A) > 0$ ，则

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)}$$

这就是贝叶斯公式。

利用条件概率的定义，乘法公式和全概率公式给出贝叶斯公式的证明，并分析贝叶斯公式的使用条件及其本质。

注：

1. 由果求因
2. 逆概公式
3. 先验概率→后验概率

讲述贝叶斯公式的来源：

复习全概率公式，为本节课内容做铺垫。

给出贝叶斯公式以定理形式的严谨描述，解释贝叶斯公式的条件、形式、本质及应用。

这个公式最早是由英国学者，托马斯贝叶斯提出。贝叶斯是一个很神秘的人，他是一个神父，业余时间喜欢研究数学，写了很多与数学有关的文章，但都未发表。在他死后，他的一个朋友在整理他的遗物时，发现一个文章很有意思，就替他发表了，这就是1763年的一篇论文《论有关机遇问题的求解》。在这篇文章中，首次提出了一个公式和一种推理方法，后人将之命名为贝叶斯公式，并由此发展出了贝叶斯推断等一系列贝叶斯理论。	感受数学知识所蕴含的数学文化。
讲述贝叶斯公式的应用：	
贝叶斯在实际生活中具有广泛应用，比如大数据、人工智能、医疗诊断等等。	介绍垃圾邮件过滤，让学生体会数学在实际生活中的应用。
2002年保罗·格雷厄姆(Paul Graham)提出使用“贝叶斯推断”过滤垃圾邮件。他说，这样做的效果，好得不可思议。1000封垃圾邮件可以过滤掉995封，且没有一个误判。另外，这种过滤器还具有自我学习的功能，会根据新收到的邮件，不断调整。收到的垃圾邮件越多，它的准确率就越高。所以《贝叶斯公式》在生活中占有十分重要的地位。	
例：一批同型号的灯泡，由编号1、2、3的三台机器共同生产，各台机器生产的灯泡占这批灯泡的比例分别为30%、30%和40%，而各台机器生产的灯泡的次品率分别为3%、2%和1%。现随机的取一只灯泡，发现是次品，求这只灯泡是由1号机器生产的概率是多少？	板书详细讲解例题，让学生掌握贝叶斯公式的使用方法 & 解题步骤，理解贝叶斯公式的本质。
(板书详细讲解例题)	
(雨课堂练习) 8只步枪中有5支已校准过，3只未校准。一名射手用校准过的枪射击时，中靶的概率为	通过雨课堂，一方面让学生巩固课堂所学，另

0.8；用未校准过的枪射击时，中靶的概率为0.3。现从8只枪中任取一支用于射击，结果中靶。所用的枪是校准过的概率是多少？

一方面与学生互动，让学生参与到课堂教学中，体现学生的主体地位。

三、实例分析：

1. 银行信用评价问题：

建立数学模型进行求解。

设 $A = \{\text{按期还款}\}$ ， $B = \{\text{客户守信}\}$ ， $\bar{B} = \{\text{客户不守信}\}$ 现在银行监测到客户按期还款 A 发生，对客户有什么新的后验认识呢？

也就是要求在 A 发生的条件下，客户守信的概率 $P(B|A)$

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})} \\ &= \frac{0.5 \times 0.9}{0.5 \times 0.9 + 0.5 \times 0.5} = 0.64 \end{aligned}$$

算出概率是0.64。

这就是说银行通过客户一次按期还款改变了对他的信用评价，由先验的守信概率0.5，调整到后验的守信概率0.64，确实通过按期还款提高了他的信用评价。

如果客户再一次按期还款，请问银行是如何重新评估的呢？

再按贝叶斯公式，这时银行的先验概率已变为

$$P(B) = 0.64, P(\bar{B}) = 0.36$$

计算得后验概率为0.76，可见信用评价进一步提升。

经计算，如果客户连续4次保持按期还款，其守信概率可将持续上升到91%，但如果出现逾期，信用

诚信是社会主义核心价值观的基本内容之一，是人类社会交往行动的普遍精神，也是人类共同生活的通则。

我们利用贝叶斯公式，解决视频中提到的信用评价问题，让学生体会诚实守信的重要性，培育诚信精神，引导学生树立正确的价值观，这在当前推进社会诚信体系建设的大背景下，显得尤为重要。

也会相应的下降。

视频中，客户说他连续 4 次保持按期还款，只逾期一次，我们利用贝叶斯公式计算可得他的守信概率下降到 66%，这个结果是客户没有想到的，只有一次逾期，信用下降这么多，所以在当今建设诚信社会的背景下，守信显得尤为重要。

2. 新冠检测“假阴性”问题：

假设新冠病毒肺炎的发病率为 0.0013，现用核酸检测试剂进行检查。设 A ：诊断被检验者未被感染（呈阴性）， B ：检验者被感染。核酸检测试剂的可靠性 $P(A|B) = 0.4$ ， $P(A|\bar{B}) = 1$ 。

如果一个人的核酸检测为阴性，那么这个人实际被感染的概率是多少？即，要求 $P(B|A)$

解：设 $A = \{\text{呈阴性}\}$ ， $B = \{\text{感染}\}$ ， $\bar{B} = \{\text{未感染}\}$

先验概率 $P(B) = 0.0013$ ， $P(\bar{B}) = 0.9987$ ，

检测的可靠性 $P(A|B) = 0.4$ ， $P(A|\bar{B}) = 1$ ，

利用贝叶斯公式

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})} \\ &= \frac{0.0013 \times 0.4}{0.0013 \times 0.4 + 0.9987 \times 1} \\ &= 0.00052 \end{aligned}$$

后验概率 $P(B|A) = 0.00052 \ll P(B) = 0.0013$ ，

检测基数大，病毒传染性强，“假阴性”不可忽视！

复查：

再利用贝叶斯公式

利用贝叶斯公式，详细讲解上课时提的第二个问题，让学生从数学的角度理解新冠肺炎核酸检测中的“假阴性”问题。

探讨科学抗疫的必要性，对比国内外抗疫的措施与结果，结合学生亲身感受，提升学生的民族自豪感与历史使命感。

$$\begin{aligned}
 P(B|A) &= \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})} \\
 &= \frac{0.00052 \times 0.4}{0.00052 \times 0.4 + 0.99984 \times 1} \\
 &= 0.000208 \ll 0.00052
 \end{aligned}$$

10000 个呈阴性的检测中有 2 人是假阴性的患者！

再次复查： $P(B|A) = 0.000083$ 。

（雨课堂练习）求解课前任务中问题：网络聊天中标注为女生，真的为女生的概率。

解：设 $A = \{\text{标注为女生}\}$ ， $B = \{\text{用户为女生}\}$

$$\begin{aligned}
 P(B|A) &= \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})} \\
 &= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{4}}{\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}} = \frac{3}{7}
 \end{aligned}$$

四、思考题：

伊索寓言“狼来了”

讲的是一个小孩每天到山上放羊，山里有狼出没。第一天，他在山上喊“狼来了！狼来了！”，山下的村民闻声便去打狼，发现狼没有来；第二天仍是如此；第三天，狼真的来了，可无论小孩怎么喊叫，也没有人来救他，因为前两次他说了谎，人们不再相信他了。

请用贝叶斯公式的思想，建立说谎者的诚信模型，来计算小孩每次撒谎后的可信度是如何下降的？

利用雨课堂与学生互动，并请学生讲解过程，锻炼学生的表达能力，再次突出学生的课堂主体地位。

学以致用，巩固贝叶斯公式。通过此例，使学生明白：在电信欺诈横行的虚拟社会中，聊天有风险、交友需谨慎。

通过熟知的寓言故事，让学生自己利用贝叶斯公式，建立诚信模型，进而思考：一个经常不讲诚信的人，即使有一天讲了真话，也难以取得别人的信任的数理逻辑，并体会诚实守信的重要性。

五、课堂小结： 掌握推导：是由条件概率、乘法公式，全概率公式导出的；进而介绍了贝叶斯公式在银行信用评级体系中的应用，最后又具体分析了其在新冠疫情检测过程中关于假阴性的，一个实际概率问题。 重点是掌握贝叶斯公式的定义；难点是应用贝叶斯公式来解决实际问题。 此外，利用现有信息修正先验概率获得后验概率，并进行统计推断的思维方式，是本节课的更高要求。	进行课堂总结，起到画龙点睛的作用。
课后巩固	设计意图
1. 请查阅机器学习中贝叶斯分类的思想； 2. 请寻找贝叶斯思想在生活中的应用； 3. 完成下次课前任务； 4. 作业 P24：1. 20，1. 22.	拓展阅读，引导学生接触学科前沿，激发学生的创新性思维，同时学以致用。